

Annexe précisant l'article 7

Concours Ensai, spécialité « économie et gestion ».

Programme de l'oral de mathématiques spécifique Ensai

1. Nombres complexes

Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe; module et argument d'un produit, d'un quotient.

Ecriture $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

Résolution dans \mathbb{C} des équations du second degré à coefficients réels.

Interprétation géométrique de $z \# z'$ avec $z' = z + b$ ou $z' - w = k(z - w)$ avec k réel non nul, ou $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$.

2. Ensemble et combinatoire

Ensembles :

- opérations élémentaires sur les parties d'un ensemble : intersection, réunion, complémentation, différence symétrique ;

- inclusion, ensemble des parties, recouvrement, partition ;

- produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.

Relations binaires :

- définition, propriétés : réflexibilité, symétrie, antisymétrie, transitivité. Relations totales et complètes ;

- graphe d'une relation ;

- préordre, ordre, relation d'équivalence, classes d'équivalence, ensemble-quotient. Application à la relation de préférence et aux classes d'indifférence ;

- notions de majorant, de minorant, de plus grand élément, de plus petit élément, de borne supérieure, de borne inférieure, d'élément maximal, d'élément minimal.

Applications :

- injection, surjection, bijection.

Combinatoire :

- nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre ;

- permutation, arrangement, combinaison.

3. Algèbre linéaire

Structures d'espace vectoriel sur \mathbb{R} , sous-espace vectoriel.

Système de vecteurs : combinaison linéaire, indépendance linéaire, base, dimension.

Application linéaire, noyau et image d'une application linéaire. Matrice.

Opérations sur les matrices. Transposition d'une matrice. Matrices inversibles, déterminants.

Valeur propre d'une matrice, vecteur propre, sous-espace propre associé.

Systèmes d'équations linéaires, écriture matricielle. Système de Cramer, résolution. Rang d'une matrice.

Matrices triangulaires, matrices diagonales, triangularisation, diagonalisation.

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques associées. Définition d'un espace euclidien. Produit scalaire. Orthogonalité. Norme euclidienne.

4. Analyse mathématique

Espaces métriques : cas de \mathbb{R}^n :

- distance, boules ouvertes, boules fermées, ensembles ouverts, ensembles fermés ;
- limite, continuité d'une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^k .

Convexité dans \mathbb{R}^n : Définition. Cône convexe. Enveloppe convexe.

Suites de nombres réels. Définition : limite d'une suite.

Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

- étude des fonctions numériques : dérivée, différentielle, représentation graphique. Recherche d'extrema ;
- fonctions usuelles : linéaire, trigonométrique, logarithmique, exponentielle, puissance ;
- théorème de Rolle (sans démonstration), formule de Taylor, développements limités.

Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} :

- dérivées partielles, différentielle totale ;
- formule de Taylor (sans démonstration) ;
- fonctions concaves, convexes, quasi concaves ;

- fonctions implicites, théorème des fonctions implicites (sans démonstration) ;
- recherche d'extrema : conditions nécessaires, conditions suffisantes ;
- recherche d'extrema sous contrainte homogène. Méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Intégration dans \mathbb{R} :

- intégrale de Riemann ;
- utilisation des fonctions primitives pour le calcul des intégrales.

5. Statistique descriptive

Analyse statistique d'une variable : tri à plat :

- définition d'une variable statistique : population, caractères, modalités ;
- effectifs, fréquence ;
- représentations graphiques ;
- caractéristiques de position :
 - cas où l'ensemble des modalités est quelconque et fini : le mode ;
 - cas où l'ensemble des modalités est totalement ordonné : la médiane, les quantiles ;
 - cas où l'ensemble des modalités a une structure d'espace vectoriel : la moyenne ;
- caractéristiques de dispersion dans le cas où l'ensemble des modalités est \mathbb{R} :
 - étendue ;
 - intervalles interquartiles ;
 - variance, écart-type, coefficient de variation.

Cas des variables chronologiques. Méthodes élémentaires de dessaisonnalisation : moyenne mobile, coefficients saisonniers.

Analyse statistique de deux variables : tri croisé :

- tableau d'effectifs, fréquences marginale et conditionnelle ;
- décomposition de la variance résiduelle. Rapport de corrélation ;
- covariance, coefficient de corrélation linéaire, ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ;

- coefficient de corrélation des rangs.

6. Éléments de théorie de probabilités

Espaces probabilisés :

- expérience aléatoire. Tribu d'événements. Système complet d'événements ;
- définition mathématique de la probabilité ;
- probabilités conditionnelles. Notation $P_B(A)$ ou $P(A/B)$. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes ;
- indépendance en probabilité d'événements.

Variables aléatoires :

- définition d'une variable aléatoire à valeurs réelles ou plus généralement à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Variables aléatoires réelles discrètes :

- loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$. Espérance ou moyenne. Variables centrées ;

- variable aléatoire $Y = g(X)$ fonction d'une variable aléatoire discrète X , où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par X ;

- variance, écart-type, moment d'ordre 2, variables réduites ;

- moments d'ordre n .

Vecteurs aléatoires discrets (à valeurs dans \mathbb{R}^n) :

- loi de probabilité d'un vecteur à valeur dans \mathbb{R}^n . Lois marginales, lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles.

Indépendance de n variables aléatoires réelles :

- espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires. Covariance.

Coefficient de corrélation linéaire.

Lois discrètes usuelles :

- loi de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.

Variables aléatoires à densité :

- définition d'une densité de variable aléatoire.

Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire, tels que $aX + b$, X^2 , $\exp X$, etc. :

- espérance ou moyenne. Variables centrées ;
- variance, écart-type. Moment d'ordre 2. Variables réduites ;
- moment d'ordre n ;
- lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace-Gauss) ;
- graphes des lois de Student, des lois du Khi-2 (sans démonstration).

Estimation :

- échantillonnage. Estimateur. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance d'une moyenne, d'une proportion, d'une variance.