J. 21 1520

FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE DE TECHNICIEN GÉOMÈTRE
DU CORPS DES GÉOMÈTRES-CADASTREURS
DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2022

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures – Coefficient : 6

Résolution d'un ou plusieurs problèmes ou exercices de mathématiques

---

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation, en dehors du volet rabattable d'en-tête, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tels que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro ou toute autre indication, même fictive, étrangère au traitement du sujet.

Sur les copies, les candidats devront écrire et souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre de couleur noire ou bleue uniquement. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

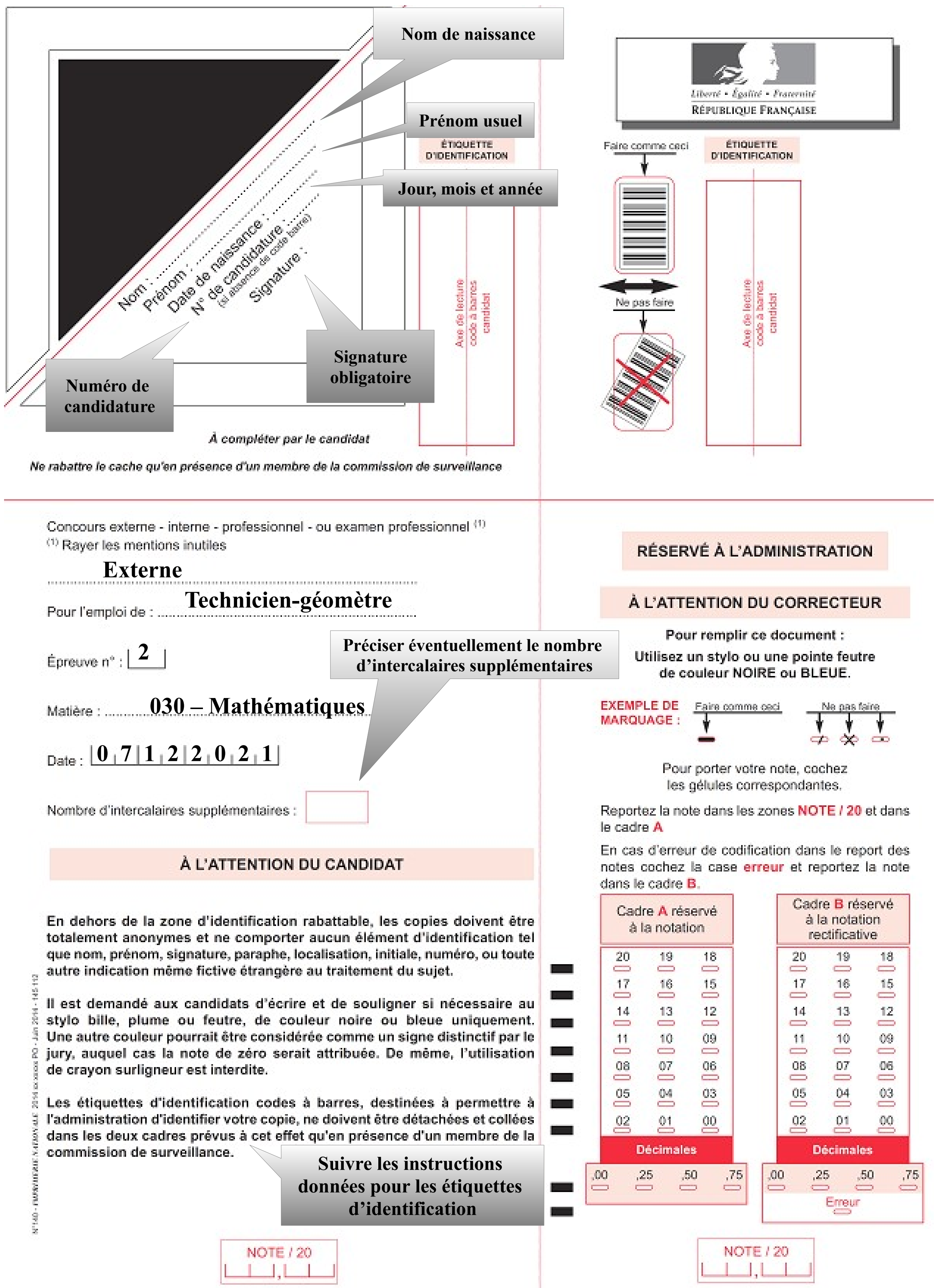
Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Liberté
Égalité
Fraternité

Tournez la page S.V.P.

Le candidat complétera l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformera aux instructions données



EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

FINANCES PUBLIQUES

SUJET

Mathématiques

Code matière : 030

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :
• les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;
• les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » ;
• les règles à calcul, équerres, compas, rapporteurs.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

Exercice 1

1. Pour tous réels a et b, montrer que : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.
Vous vous appuierez sur le fait que $e^{i(a+b)}=e^{ia}\times e^{ib}$

2. On considère, pour tout réel x, l'expression $A(x)=1+\cos(2x)+\sin(2x)$.
a. Vérifier que pour tout réel x on a $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$.
b. En déduire que $A(x)=2\sqrt{2}\cos(x)\cos(x-\frac{\pi}{4})$.
c. Déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$.

3.
a. Résoudre dans [-π ; π[l'équation $\cos(x)+\sin(x)=1$
b. Résoudre dans [-π ; π[l'inéquation $\cos(x)+\sin(x)<1$

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif .
On considère ABC un triangle rectangle en A tel que AB= a et AC=3a.
Vous ferez une figure en prenant a = 2 cm.

1. Construire le barycentre G de (A,-5) (B,6) (C,2).
2. Calculer GA^2, GB^2 et GC^2 en fonction de a .
3. Déterminer et construire l'ensemble **E** des points M du plan vérifiant :
$-5MA^2+6MB^2+2MC^2=12a^2$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \int_n^{n+1} 2e^{-2x}\,dx$.

1.
a. Calculer u_0.
b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = e^{-2n}(1-e^{-2})$.

2.
a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Donner ses éléments caractéristiques.
b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3.
Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
a. Exprimer S_n en fonction de n.
b. Étudier la limite de la suite (S_n).
c. Déterminer à partir de quelle valeur de n, on a $S_n > 0{,}9999$.

Exercice 4

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par : $g(x) = 1 + x - 3x\ln(x)$.

1. Étudier les limites de la fonction g en 0 et en +∞.
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle] 0 ; +∞ [et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que sur l'intervalle [1;2], l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α. Donner un encadrement de α à 10^{-2} .

PARTIE B : Étude de la fonction *f*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par : $f(x) = \dfrac{100\ln(x)}{(1+x)^3}$.

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère .

1.
a. Déterminer la limite de f en 0.
b. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 100\dfrac{\ln(x)}{x^3}$.

En déduire la limite de f en +∞.

c. Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f.

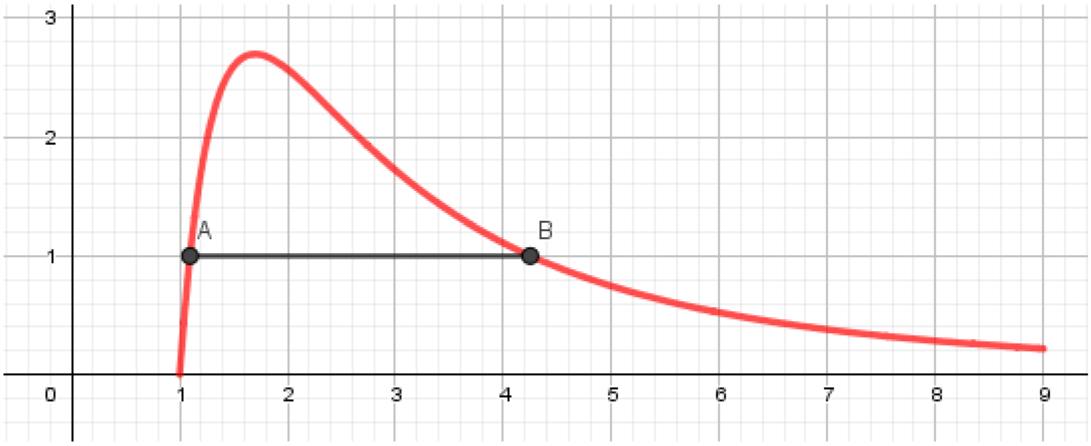
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \dfrac{100\,g(x)}{x(1+x)^4}$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Montrer que le maximum de f sur l'intervalle] 0 ; +∞ [est : $f(\alpha) = \dfrac{100}{3\alpha(1+\alpha)^2}$ où α est le réel défini à la question **A.3.**

5. Déterminez une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

6. Un maire souhaite installer un toboggan dans l'aire de jeu de son village. Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe de la fonction f définie sur l'intervalle [1;9].
La courbe C_f est tracée dans le repère orthonormé ci-dessous dont l'unité est le mètre.



Pour consolider le toboggan, le maire a demandé au constructeur de renforcer la structure par une barre horizontale située à 1 m du sol. Quelle sera alors la longueur en centimètres de cette barre ? (arrondir à l'unité).