41

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE ET DES FINANCES

DIRECTION GÉNÉRALE
DE LA CONCURRENCE, DE LA CONSOMMATION
ET DE LA RÉPRESSION DES FRAUDES

CONCOURS de : Inspecteur de la DGCCRF externe

Épreuve : Mathématiques

e^{-x}

$\frac{38{,}75}{40} \to \frac{19{,}5}{20}$

Exercice 1

1) a) [AE] et [GC] sont parallèles (car (AE) ⊥ (ABD) et (GC) ⊥ (ABC)) (donc coplanaires) et de même longueur donc AEGC, quadrilatère non croisé, est un parallélogramme.

On a donc $\vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AG}$.

b) $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = (\vec{AC} + \vec{AE}) \cdot \vec{BD}$

$= \vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{AE} \cdot \vec{BD}$

or dans le carré ABCD, les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$

et comme (AE) ⊥ (BCD), (AE) et (BD) sont orthogonales

donc $\vec{AE} \cdot \vec{BD} = 0$.

On a donc $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$.

c) . (AG) ⊥ (BD)

. (AG) ⊥ (BE) (car on suppose $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$)

. (BD) et (BE) sont sécantes (non confondues)

donc (AG) ⊥ (BDE).

2) a) $\vec{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

donc $\vec{BD}$ et $\vec{BE}$ sont non colinéaires.

Or B(1;0;0), D(0;1;0) et E(0;0;1) vérifient l'équation

$x+y+z-1=0$.

Le plan d'équation $x+y+z-1=0$ contient donc B, D et E ;

or ces derniers étant non alignés (car $\vec{BD}$ et $\vec{BE}$ non colinéaires)

Exercice 3

1) $E = \{ M(x$ [redacted]

$= \{ x$ [redacted]

$E =$ [redacted]

c'est donc le plan (BDE).

b) Le point K existe puisque $(AG) \perp (BDE)$.

Comme $K \in (AG)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AK} = \lambda \overrightarrow{AG}$, ce qui entraîne $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

et donc $K(\lambda ; \lambda ; \lambda)$.

Or $K \in (BDE)$ donc $\lambda + \lambda + \lambda - 1 = 0$

donc $\lambda = \frac{1}{3}$.

On a donc $K\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

c) On a $\overrightarrow{KG}\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

donc $KG = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Or $(KG) = (AG)$ donc $(KG) \perp (BDE)$

donc BDE et [KG] sont une base et hauteur de la pyramide BDEG

donc $V_{BDEG} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{BDE} \times KG$

$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$V_{BDEG} = \frac{1}{3}$

Exercice 2

Partie A

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$-1 \leq -\cos x \leq 1$

et $-1 \leq \sin x \leq 1$

donc $-1+(-1)+1 \leq -\cos x+\sin x+1 \leq 1+1+1$

$-1 \leq -\cos x+\sin x+1 \leq 3$

or $e^{-x} > 0$ donc en multipliant tous les membres des inégalités par e^{-x}

on a $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$.

2) Lorsque $x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$

donc $-e^{-x} \to 0$ et $3e^{-x} \to 0$

donc d'après le théorème des gendarmes $f(x) \to 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

3) $f'(x) = (-e^{-x})(-\cos x+\sin x+1)+(e^{-x})(\sin x+\cos x)$

$= e^{-x}(\cos x-\sin x-1+\sin x+\cos x)$

$f'(x) = e^{-x}(2\cos x-1)$

4)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\cos x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$2\cos x-1 \geq 0$ ssi $\cos x \geq \frac{1}{2}$

ssi $x \in \left[2k\pi-\frac{\pi}{3} ; 2k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Partie B

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f(x)-g(x) = e^{-x}(\sin x+1) \geq 0$ car $\begin{cases} e^{-x} > 0 \\ \sin x \geq -1 \end{cases}$

donc C_f est au-dessus de C_g, et les courbes s'intersectent lorsque $\sin x = -1$, c'est-à-dire $x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) $A_D = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (f-g)$ car C_f est au-dessus de C_g

$= [H]_{\pi/2}^{3\pi/2}$ car H est une primitive de $f-g$

$= H(3\pi/2) - H(\pi/2)$

$= \left(-\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{2} - 1\right)e^{-3\pi/2} - \left(-\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} - 1\right)e^{-\pi/2}$

$A_D = -\frac{3}{2}e^{-3\pi/2} + \frac{1}{2}e^{-\pi/2}$ u.a. $= -6e^{3\pi/2} + 2e^{-\pi/2}$ cm^2

Exercice 3

1) $E = \{ M(x,y), (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

$= \{ x M(1,0) + y M(0,1), (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

$E = \text{Vect}(A,B)$. C'est donc un espace vectoriel.

On a $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

En considérant les coefficients en haut à gauche et en bas à gauche de $M(x,y)$, on constate que $M(x,y)=0$ ssi $x=0$ et $y=0$.

La famille (A,B) est donc libre ; c'est donc une base de l'espace vectoriel $\text{Vect}(A,B)=E$, qui est donc de dimension 2.

2) $\det A = 3\times4\times(-1) + (-1)\times4\times2 - (-1)\times(-2)\times(-1) - 3\times4\times(-2)$

$= -12 - 8 + 2 + 24$

$\det A = 6$

donc A est inversible

donc A est de rang 3.

3) . $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Les deux premières colonnes de $A-I_3$ sont indépendantes, donc $\text{rg}\, A-I_3 \geq 2$.

On $(A-I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{Ker}(A-I_3) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

. $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Les deux premières colonnes de cette matrice étant indépendantes, $\text{rg}(A-2I_3) \geq 2$.

On $(A-2I_3)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{Ker}(A-2I_3) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

. $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Les deux premières colonnes de $A-3I_3$ sont indépendantes, donc $\text{rg}(A-3I_3)\geq 2$.

On $(A-3I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{Ker}(A-3I_3) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

. 1, 2 et 3 sont donc valeurs propres de A.

. Les sous-espaces propres $\text{Ker}(A-\lambda I_3)$ $(\lambda\in\{1;2;3\})$ de A étant en somme directe (car sous-espaces propres d'une même matrice pour des valeurs propres différentes), cette somme est de dimension 3.

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE ET DES FINANCES

DIRECTION GÉNÉRALE
DE LA CONCURRENCE, DE LA CONSOMMATION
ET DE LA RÉPRESSION DES FRAUDES

CONCOURS de : Inspecteur de la DGCCRF externe

Épreuve : Mathématiques

le l'algorithme

Exercice 3 (suite)

C'est donc $\mathbb{R}^3$ tout entier, et on en déduit que A est diagonalisable

4) D'après les calculs du 3), si $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, alors on a

$AP = PD_A$ où $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On à la fin du 3), on a établi que la somme des $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ pour $\lambda \in \{1; 2; 3\}$ était égale à $\mathbb{R}^3$.

Or cette somme étant égale à $\mathrm{Im}(P)$, on a $rg(P) = 3$ donc P est inversible

Or $AP = PD_A$

donc en multipliant à droite par P^{-1} on obtient

$A = PD_AP^{-1}$.

5) On effectue les mêmes opérations sur les lignes de P et I_3 :

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

Exercice 5

Partie 1

1) et 2)

$f'(1)$

Par.

On a donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0X_1$

$BX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -1X_2$

$BX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1X_3$

donc par le même raisonnement qu'au 4),
$B = PD_BP^{-1}$ avec $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7) Avec $D(x,y) = xD_A + yD_B$

on a bien $M(x,y) = xA + yB = xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1}$
$= P(xD_A)P^{-1} + P(yD_B)P^{-1}$
$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$.

8) $M \mapsto PDP^{-1}$ étant un automorphisme de l'algèbre $M_3(\mathbb{R})$,
$M(x,y)$ est inversible ssi $D(x,y)$ est inversible
ssi $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix}$ est inversible

donc $M(x,y)$ est inversible si et seulement si $x \notin \{0, \frac{y}{2}, \frac{y}{3}\}$.

9) $B^2 = -B$ donc $B^2 = M(0,-1)$ est un élément de E.
A est aussi un élément de E, car c'est $M(1,0)$ par définition.

Exercice 4

1) On note $\wedge$ l'opérateur PGCD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $u_{n+1} \wedge u_n = (3u_n+1) \wedge u_n$

$= 1 \wedge u_n$ (en faisant 1 étape de l'algorithme d'Euclide)

$= 1$

donc u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+1} \equiv 3u_n + 1$ [2]

$\equiv u_n + 1$ [2]

donc u_{n+1} et u_n ont des résidus distincts mod. 2.

Autrement dit, ils sont de parité différente.

3) Posons $p = 5$. Alors p est premier et impair

et pourtant $u_p = u_5 = 121 = 11^2$.

Donc l'affirmation proposée est fausse.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	1	4	13	40	121

4) a) . On a bien $3^0 - 1 = 0 = 2u_0$.

. Supposons, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 3^n - 1$.

Alors $2u_{n+1} = 6u_n + 2 = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 3 + 2$

$2u_{n+1} = 3^{n+1} - 1$.

On a donc bien, par récurrence sur n, $2u_n = 3^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $2u_{2022} \equiv 3^{2022} - 1$ [7]

$\equiv (3^6)^{337} - 1$ [7]

$\equiv 0$ [7]

donc comme 2 est inversible modulo 7, u_{2022} est divisible par 7.

Exercice 5

Partie 1

1) et 2)

$f'(1) = e^1 - \frac{e}{1} = 0$.

Pour $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{\frac{e}{x^2}}_{>0} > 0$.

On a donc

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

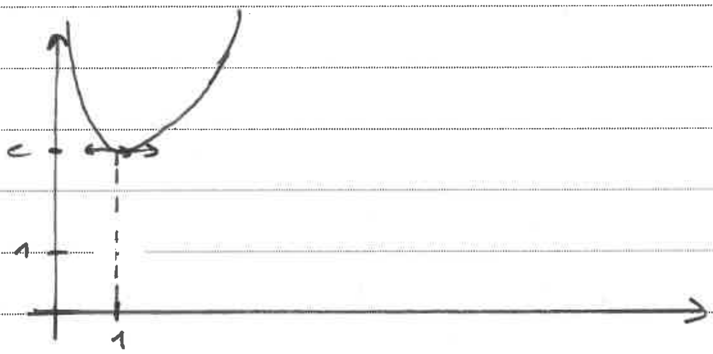
Justification de $\lim\limits_{+\infty} f$: Si $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = e^x\left(1 - e\frac{\ln x}{e^x}\right)$

$$= \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \underbrace{\left(1 - e \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}$$

donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Le calcul des autres limites ne fait pas intervenir de forme indéterminée

3)



4) Soit $g : \begin{cases}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) - x. \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $g'(x) = e^x + \frac{e}{x^2} - 1$.

~~et $g''(x) = e^x - \frac{2e}{x^3}$ et $g^{(3)}(x) = e^x + \frac{6e}{x^4}$.~~

~~$g^{(3)}$ est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g'' est strictement croissante~~

~~Or $g'' \to -\infty$ et $g'' \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ donc on a~~

~~x~~	~~0~~		~~β~~		~~$+\infty$~~
~~$g''(x)$~~		~~$-$~~	~~0~~	~~$+$~~	
~~$g'(x)$~~		$\searrow$		$\nearrow$	

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE ET DES FINANCES

DIRECTION GÉNÉRALE
DE LA CONCURRENCE, DE LA CONSOMMATION
ET DE LA RÉPRESSION DES FRAUDES

CONCOURS de : Inspecteur de la DGCCRF externe

Épreuve : Mathématiques.

'$(1/u_n)$ est également strictement décroissante.

Exercice 5 (suite)

4) (suite)

On $x > 0$ donc $e^x - 1 > 0$

donc comme $\frac{e}{x^2} > 0$, $g'(x) > 0$.

g est donc strictement croissante.

On $g(1) = e - e - 1 = -1$

et $g(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 \geq 7,3 - \frac{2,8}{2} - 2$ (d'après les encadrements de l'énoncé)

$g(2) \geq 3,9$

donc l'équation $g(x) = 0$, équivalente à $f'(x) = x$, a une seule solution α dans $\mathbb{R}_+^*$, et $\alpha \in]1,2[$.

Partie 2

5) . u_0 existe et $u_0 = 2 \geq 2$.

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n existe et $u_n \geq 2$.

Alors $u_n > 0$ donc $f(u_n) = u_{n+1}$ existe.

De plus, $u_{n+1} \geq e$ car e est le minimum de f d'après son tableau de variations

donc $u_{n+1} \geq 2$.

On a donc bien montré par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

Soit $x \in [2, +\infty[$

6) a) On a $g'(x) = f'(x) - 1$

$$= e^x - \frac{e}{x} - 1$$

or $e^x \geq e^2 > 7{,}3$

et $\frac{e}{x} - 1 \leq \frac{e}{2} - 1 \leq 0{,}4$

donc $g'(x) \geq 6{,}9 > 0$

donc g est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

On $g(2) = e^2 - e\ln(2) - 2$

$$\geq 7{,}3 - 2{,}8 \times 0{,}7 - 2$$

$$\geq 3{,}34 > 0$$

donc g est strictement positive sur $[2, +\infty[$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0$

donc (u_n) est strictement croissante.

7) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 3{,}34$

donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2 + 3{,}34n$

or $2 + 3{,}34n \to +\infty$

donc $u_n \to +\infty$.

8) a) Soit $x \in [2; +\infty[$.

Posons $\begin{cases} a(x) = x - 2\ln x \\ b(x) = \frac{e^x}{3} - x. \end{cases}$

Alors $\begin{cases} a'(x) = 1 - \frac{2}{x} \geq 0 & \forall x \geq 2 \\ b'(x) = \frac{e^x}{3} - 1 \geq 0 & \forall x \geq 2 \end{cases}$

et $\begin{cases} a(2) = 2 - 2\ln 2 \geq 0{,}6 > 0 \\ b(2) = \frac{7{,}3}{3} - 1 > 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x \geq 2\ln x \\ \frac{e^x}{3} \geq x \end{cases}$ CQFD.

b) $u_{n+1} = e^{u_n} - e\ln u_n$

$$\geq 3u_n - e\left(\frac{u_n}{2}\right)$$

$u_{n+1} \geq \frac{6u_n - eu_n}{2}$ CQFD.

Comme $u_n \to +\infty$, $\frac{1}{u_n} \to 0$. $(1/u_n)$ est également strictement décroissante.

c) $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{e^{u_n} - e\ln(u_n)}$