MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE,
DES FINANCES
ET DE LA RELANCE

Liberté
Égalité
Fraternité

Direction générale de la concurrence
de la consommation
et de la répression des fraudes

CONCOURS D'INSPECTEUR
DE LA CONCURRENCE DE LA CONSOMMATION ET DE LA REPRESSION DES FRAUDES DU 18 janvier 2022

Concours externe dominante scientifique

EPREUVE N° 2 : **Option H→ Mathématiques**

Résolution de problèmes et/ou cas pratiques

(Durée 3 heures - coefficient 1)

L'utilisation de la calculatrice est interdite

Le sujet est composé de 04 pages et de 06 exercices. La qualité de la rédaction et des justifications sera prise en compte.

Exercice n°1 : **8 points**

Les questions 1,2,3 et 4 de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. Trouver tous les entiers naturels n dont le quotient dans la division euclidienne par 5 donne un quotient égal à trois fois le reste.

2. On considère a et b deux entiers naturels. Lorsque l'on divise a par b, le reste est 8. Lorsque l'on divise $2a$ par b, le reste est 5. Déterminer le diviseur b.

3. Montrer qu'un entier relatif pair non divisible par 4 est tel que son reste dans la division euclidienne par 4 est 2.

4. **Divisibilité pour résoudre une équation.**
   Le but de cette question est de trouver tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que
   $$x^2 = 2xy + 15.$$

   Dans cette question on considérera que si $n \in \mathbb{Z}, D^+(n)$ est l'ensemble des diviseurs positifs de n. Par exemple $D^+(4) = \{1; 2; 4\}$.

   a. Justifier que $D^+(15) = D(15) \cap \mathbb{N}$ puis exprimer $D^+(15)$ sous la forme d'un ensemble d'entiers relatifs.

   b. On considère l'équation $x^2 = 2xy + 15$ où x et y sont deux entiers naturels.
   Démontrer que x et $x - 2y$ divisent 15.

   c. Déterminer les deux couples d'entiers naturels solutions de $x^2 = 2xy + 15$. On pourra compléter sur sa copie le tableau ci-dessous :

x	15	15	15	5	5	3
$x - 2y$	5	3	1	3	1	1
y						
$x^2 - 2xy$						

Exercice n°2 : **15 points**

On considère les deux fonctions f et g de la variable réelle t définies par :

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{et } g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Dans le plan rapporté au repère, orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$.

On note C la courbe paramétrée $\{M(t), t \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}\}$.

Partie I - Deux fonctions

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.
2. Calculer $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.
3. Justifier que f est une fonction paire et g une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour le point $M(-t)$ de C par rapport au point $M(t)$?
4. Déterminer des fonctions équivalentes aux fonctions f et g en $+\infty$. En déduire les limites $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} g(t)$.
5. Déterminer les quatre limites $\lim_{t \to 1^+} f(t)$, $\lim_{t \to 1^-} f(t)$, $\lim_{t \to 1^+} g(t)$ et $\lim_{t \to 1^-} g(t)$.
6. Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ et déterminer les fonctions dérivées de chacune.
7. En déduire les tableaux de variations complets des fonctions f et g sur leur ensemble de définition.

Partie 2 – Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$

8. Déterminer les développements limités des fonctions f et g en 0 à l'ordre 3.
9. Sans calculer les dérivées secondes f'' et g'' des fonctions f et g, montrer que $f''(0) = 2$ et $g''(0) = 0$. On citera le théorème utilisé.
10. En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe C en l'origine du repère.
11. Déterminer les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe C au point $M(\sqrt{3})$.

Exercice n°3 : **8 points**

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = 1 - i$ et pour tout entier naturel, $z_{n+1} = (1 + i)z_n$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et de z_2 puis de $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Démontrer que pour tout nombre complexe z, $z \times \overline{z}$ est un nombre réel.
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = z_n \times \overline{z_n}$.
   a. Calculer u_0, u_1 et u_2.
   b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.
   c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera les paramètres.
   d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   e. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice n°4 : **10 points**

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$ est convergente.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$ est convergente.
4. En déduire que pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2}\, dt$ est convergente.

Pour la suite, on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ et on note $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$.

5. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.
6. Montrer que pour tout entier naturel p, $I_{2p+1} = 0$.
7. Montrer que pour tout entier naturel p, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!}\sqrt{\pi}$.
8. Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, montrer que les intégrales à paramètres $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2}\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{t}\cos(xt) e^{-t^2}\, dt$ convergent.

Exercice n°5 : **6 points**

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f : (x; y) \longmapsto \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
2. Etudier la continuité de f en $(0,0)$.
3. a. Calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

   b. Démontrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et donner leur valeur.
4. La fonction f est-elle C^1 ? Justifier.

Exercice n°6 : **13 points**

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

Et l'on note : $E = \{M(a,b), (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$. En déterminer une base et sa dimension.
b. Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. Etude du cas $a = 0$ et $b = 0$.
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. Etude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.
a. Calculer A^2 et déterminer le polynôme annulateur de A.
b. En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.
c. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $M_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $M_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

4. Etude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.
a. Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.
b. En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.
c. La matrice B est-elle diagonalisable ?

~FIN~