Le sujet est composé de 3 pages et de 5 exercices. La qualité de la rédaction et des justifications sera prise en compte.

Exercice n°1 (**5 points**)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition :** Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)(z^2-4z+8)=0$ où z désigne un nombre complexe. **Proposition :** Les points dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition :** Pour tout nombre réel α, $1+2e^{i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.
   Proposition : $1+j+j^2=0$.

Exercice n°2 (**9 points**)

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x^2+y^2-3)^2+4y^2-8$.

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne : $z = g(x,y) = (x^2+y^2-3)^2+4y^2-8$.

1. Comparer $g(x,y)$ avec $g(x,-y), g(-x,y)$ et $g(-x,-y)$. En déduire de chaque égalité trouvée une symétrie de la surface S.
2. Montrer que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2-3)$.
3. Calculer $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.
4. Trouver tous les couples réels solutions du système d'équations suivant :
   $\begin{cases} 4x(x^2+y^2-3)=0 \\ 4y(x^2+y^2-1)=0 \end{cases}$
5. En déduire que la fonction g admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.
6. Enoncer un théorème permettant de démontrer que $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$. Montrer que la fonction g vérifie les hypothèses de ce théorème.
7. On note $r(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)$, $s(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $t(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$. Calculer $r(x,y), s(x,y)$ et $t(x,y)$.
8. Calculer $rt-s^2$ pour (x,y) valant (0,0), $(0,\pm 1)$ et $(\pm\sqrt{3},0)$. En déduire la nature des points critiques trouvés à la question 5.

Exercice n°3 (**5 points**)

Dans un repère orthonormé (O,I,J,K) d'unité $1cm$, on considère les points $A(0;-1;5)$, $B(2;-1;5)$, $C(11;0;1)$ et $D(11;4;4)$.
Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de $1cm$ par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de $1cm$ par seconde. A l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif. On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t; -1; 5)$ et $N_t(11; 0{,}8t; 1 + 0{,}6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes $(OI), (OJ)$ ou (OK). Lequel ? Justifier.
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan P parallèle à l'un des plans $(OIJ), (OIK)$ ou (OJK). Lequel ? Justifier. On donnera l'équation de ce plan P.
   c. Vérifier que la droite (AB) est orthogonale au plan P et qu'elle coupe ce plan au point $E(11; -1; 5)$.
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2. a. Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.
   b. A quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

<u>Exercice n°4</u> (**9 points**)

1. a. Calculer $f(t) = \int_0^1 e^{-ts}\,ds$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.
   b. Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
   c. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
   a. Montrer que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Montrer que $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n!)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b. Justifier l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) dt$.
3. a. Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.
   b. On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \int_0^1 \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Justifier l'égalité $\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t)\,e^{-t}dt$.
   c. Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que $S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma$.

<u>Exercice n°5</u> (**12 points**)

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficient dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.

Etant donné un entier naturel n, on désigne par $[\![0; n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.

Partie I.

Soit φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P - P'$.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1. Démontrer que φ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Démontrer que la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une famille de polynômes $S_0, S_1, \dots, S_n$ telle que :
   a. $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\varphi_n(S_i) = \frac{X^i}{i!}$,
   b. $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id.$$

7. En déduire l'expression de S_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0;n]\!]$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les deux familles de polynômes $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(T_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!} \qquad$ et $\qquad T_n(X) = S_n(nX).$

On admet de plus le résultat suivant :

Soit n un entier naturel ≥ 2. Toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

1. Donner le tableau de variations de S_3.
2. Représenter sur un même graphique les courbes des fonctions S_1, S_3 ainsi que la fonction exponentielle $(x \longmapsto e^x)$ en s'attachant à respecter la position relative de ces trois courbes.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. (*Indication : on pourra faire une démonstration par récurrence en distinguant les cas $n+1$ pair et $n+1$ impair dans l'hérédité).*

Dans la suite du problème, on note α_n l'unique racine réelle de S_n, pour tout entier naturel **impair** n.

4. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   a. Justifier que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (*Indication : On pourra étudier le signe de $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$.)*
   b. Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel l. On admet que la suite $\left(S_m(v_m)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^l. En déduire que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.