RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté • Égalité • Fraternité

Concours d'inspecteur
de la concurrence, de la consommation
et de la répression des fraudes
du 10 décembre 2018

Concours externe dominante scientifique

EPREUVE N° 2 : Option C→ Physique

Résolution de problèmes et/ou cas pratiques

(Durée 3 heures - coefficient 1)

Le candidat traitera les 3 problèmes

L’utilisation de la calculatrice est interdite

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE
ET DES FINANCES

PB 1 : Électromagnétisme

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : Nappe de courant

L'espace étant ramené au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, on considère une plaque conductrice, d'épaisseur nulle, d'extension infinie, confondue avec le plan d'équation $z = 0$.

Cette plaque, parcourue par des courants de densité surfacique $\overrightarrow{j_S} = j_{S0} \exp i\,(\omega t - \alpha x)\,\overrightarrow{u_y}$ avec j_{S0}, ω et α trois constantes positives ($i^2 = -1$), est la source d'ondes électromagnétiques se propageant dans le vide, de part et d'autre de la plaque conductrice.

On propose, pour le champ électrique $\vec{E}^{\,+}$ régnant dans le demi-espace d'équation $z > 0$, la structure (en notation complexe) $\underline{\vec{E}}^{\,+} = E_0 \exp i\,(\omega t - \alpha x - \beta z)\,\vec{u}$ (E_0 constante inconnue à ce stade).

1) Montrer que $\vec{u} = \overrightarrow{u_y}$.
2) Montrer que le paramètre β, supposé positif, vérifie la relation $\beta^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$.

On note $\vec{k}^{\,+} = \alpha \overrightarrow{u_x} + \beta \overrightarrow{u_z}$. Soit $\vec{B}^{\,+}$ le champ magnétique régnant dans le demi-espace d'équation $z > 0$ (et $\underline{\vec{B}}^{\,+}$ la structure associée en notation complexe).

3) Justifier la relation $\underline{\vec{B}}^{\,+} = \dfrac{\vec{k}^{\,+} \wedge \underline{\vec{E}}^{\,+}}{\omega}$.

De même, on note $\vec{k}^{\,-}$ le vecteur d'onde associé à l'onde se propageant dans le demi-espace $z < 0$. Soit $\vec{B}^{\,-}$ le champ magnétique régnant dans le demi-espace d'équation $z < 0$ (et $\underline{\vec{B}}^{\,-}$ la structure associée en notation complexe).

4) Exprimer le rapport $\dfrac{E_0}{j_{S0}}$ en fonction de μ_0, ω et β.

L'onde se propageant dans le demi-espace d'équation $z > 0$, transporte la puissance surfacique moyenne $P_S^{\,+} = \dfrac{E_0^{\,2}}{2 \mu_0 c}$.

5) Justifier l'expression précédente. Expliciter, de même, la puissance surfacique moyenne transportée par l'onde se propageant dans le demi-espace $z < 0$, notée $P_S^{\,-}$.

On note, finalement, P_S la puissance surfacique moyenne totale rayonnée par la plaque conductrice.

6) Expliciter P_S. Que vaut-elle, dans la limite $\omega \to 0$. Commenter ce résultat.

Partie B : Superposition de deux ondes

L'espace étant ramené au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On considère un champ électromagnétique se propageant dans le vide. Les deux composantes cartésiennes, non nulles, du champ électrique sont données par les expressions suivantes (en notation complexe) :

$E_y = E_0 \cos(\Pi \frac{y}{a})\, e^{i(\omega t - kz)}$; $E_z = \underline{\alpha} E_0 \sin(\Pi \frac{y}{a})\, e^{i(\omega t - kz)}$ (k réel positif)

1) Démontrer la relation $\frac{\Pi}{a} + i k \underline{\alpha} = 0$.

Le champ électrique étudié ici peut se mettre sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ avec $\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \exp i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$ et $\vec{E}_2 = \vec{A}_2 \exp i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})$.

2) Vérifier l'expression $\vec{A}_1 = \frac{E_0}{2}(\overrightarrow{u_y} - i \underline{\alpha} \overrightarrow{u_z})$.
3) Expliciter $\vec{A}_2$, $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$.
4) Soit θ l'angle entre les directions de propagation des deux ondes dont on étudie ici la superposition. Exprimer θ en fonction de k et a.

PB 2 : Utilisation d'une cellule photosensible

On fournit l'expression littérale : $\int_0^{X_{max}} \cos(A + BX^2)\, X\, dX = \frac{1}{B} \sin \frac{B X_{max}^2}{2} \cos\left[A + \frac{B X_{max}^2}{2}\right]$

Une source monochromatique étendue, de longueur d'onde dans le vide λ, éclaire un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air d'épaisseur e. Une lentille mince convergente, de centre O, de distance focale image f', d'axe optique orthogonal à la lame d'air, placée en sortie de l'interféromètre, permet d'observer sur un écran, la figure d'interférence à l'infini.

1) Où doit-on exactement placer l'écran ? Réaliser alors un schéma précis représentant l'interféromètre, la lentille convergente et l'écran.

On note $\varepsilon(M) = C[1 + \cos\varphi]$ l'éclairement reçu en un point quelconque de l'écran noté M, C étant une constante, a priori, inconnue (on reste évidemment dans les conditions de Gauss).

2) Que représente le paramètre φ ?

On note F' le foyer image de la lentille convergente. On définit l'angle $i = (\overrightarrow{OF'}, \overrightarrow{OM})$.

3) Exprimer φ en fonction de e , λ et i .

On utilise désormais une cellule photosensible dont la face d'entrée, disposée sur le plan de l'écran, est un disque de rayon R (supposé petit devant f'), de centre F'. Cette cellule fournit un signal électrique, noté S , proportionnel à la puissance totale reçue.

4) Montrer que S est donné, à une constante multiplicative près, par l'expression $\int_0^{X_{\max}} \left\{1+\cos\left[\frac{4\Pi e}{\lambda}(1-\frac{X^2}{2})\right]\right\} X \; dX$, dans laquelle $X_{\max} = \frac{R}{f'}$.

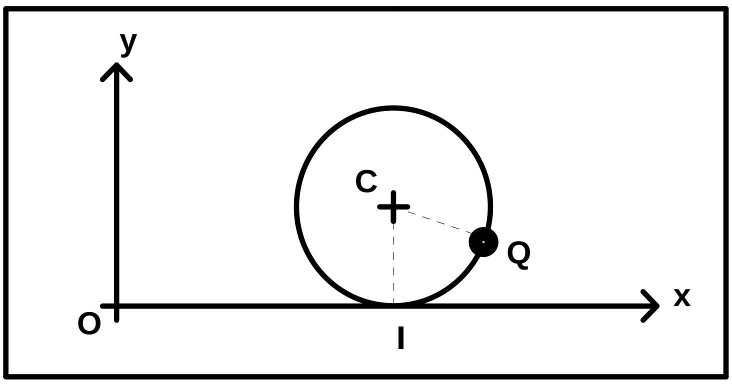
5) En déduire que S se met sous la forme $S = K\left[1+G\,(\Pi\alpha\frac{e}{\lambda})\cos\,(2\Pi\,\beta\frac{e}{\lambda})\right]$, G étant la fonction sinus cardinal. On exprimera α et β en fonction de $X_{\max}$.

6) A partir du contact optique, on augmente l'épaisseur de la lame. Comment procède-t-on concrètement ? Décrire alors l'évolution du signal électrique fourni par la cellule photosensible en fonction de $\frac{e}{\lambda}$.

7) Que deviennent les coefficients α et β , ainsi que le paramètre K , dans le cas limite d'une cellule photosensible ponctuelle placée en F' ? Commenter.

PB 3 : Mouvement d'un cerceau lesté

Le référentiel terrestre, ramené au repère orthonormé $(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_y}$ vertical ascendant est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, de norme g , est supposé uniforme. Un cerceau, de centre noté C , de masse M et de rayon R , roule sans glisser sur le plan horizontal (xOz) en restant constamment dans le plan (xOy). On le leste d'une masse ponctuelle m , fixée en un point quelconque du cerceau, noté Q . On note I le point géométrique de contact entre le cerceau et le sol et on introduit l'angle $\alpha = (\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CQ})$ tel que $x_Q > x_C \Leftrightarrow \alpha \in \left]0,\Pi\right[$ (voir ci-dessous).



1) On note E_C l'énergie cinétique, dans le référentiel terrestre, du cerceau lesté. Justifier la relation $E_C = [\,M + m\,(1-\cos\alpha)\,](R\dot{\alpha})^2$.

2) On note E_P l'énergie potentielle, dans le référentiel terrestre, du cerceau lesté. Justifier que l'on peut poser $E_P = - m\, g\, R \cos\alpha$.

3) Montrer que $\alpha(t)$, vérifie l'équation différentielle suivante :

$$2\,\ddot{\alpha}\left[\frac{M}{m} + (1-\cos\alpha)\right] + \left[(\dot{\alpha})^2 + \frac{g}{R}\right]\sin\alpha = 0$$

4) On laisse le cerceau évoluer librement à partir de la situation initiale $\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0 \in \left]0, \frac{\Pi}{2}\right[\\ \dot{\alpha}(0) = 0 \end{cases}$.

L'évolution est-elle périodique ?

On s'intéresse désormais aux petits mouvements (soit $|\alpha| << \frac{\Pi}{2}, \forall t$).

Soit $T = f(M, m)\sqrt{\frac{R}{g}}$ la période propre des oscillations obtenues. Expliciter la fonction f.

Quelle est sa dimension ?