Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Concours d'inspecteur de la concurrence, de la consommation et de la répression des fraudes du 7 janvier 2020

Concours externe dominante scientifique

EPREUVE N° 2 : Option D→ Mathématiques
Résolution de problèmes et/ou cas pratiques
(Durée 3 heures - coefficient 1)

Le candidat traitera les 5 exercices (pages 2 à 4)

L'utilisation de la calculatrice est interdite

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE
ET DES FINANCES

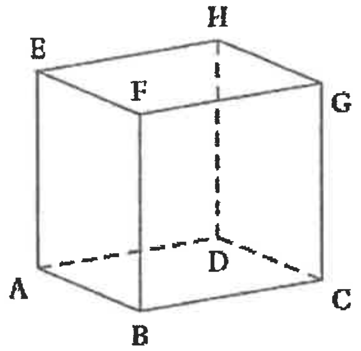
CONCOURS INSPECTEURS CCRF 2020
Epreuve de mathématiques

3 heures coefficient 1 Calculatrice interdite

Le sujet est composé de 4 pages et de 5 exercices. La qualité de la rédaction et des justifications sera prise en compte.

Exercice n°1 **(5,5 points).**

On considère un cube $ABCDEFGH$.

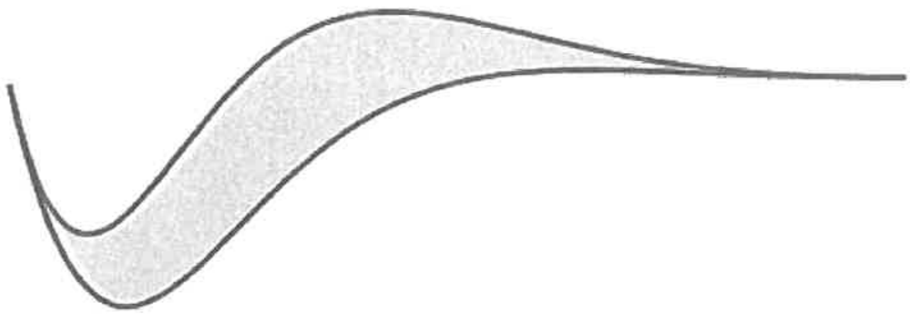


1. a. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
   c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
   Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).
   c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer le volume de la pyramide $BDEG$.

Exercice n°2 **(6 points)**

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)$ et $g(x) = -e^{-x}\cos x$.

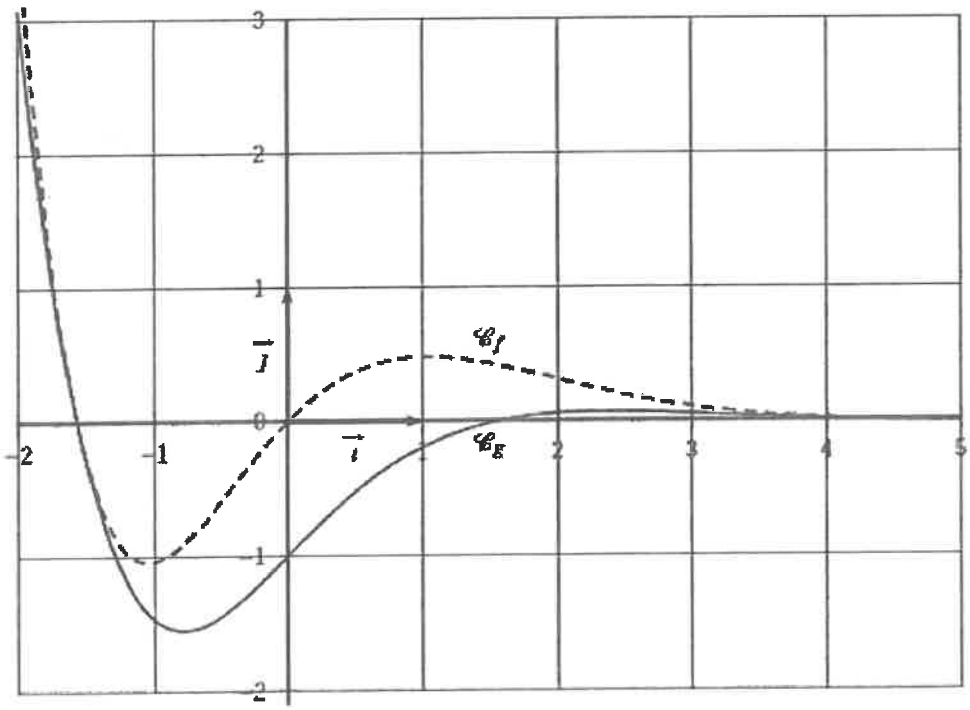
On admet que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Et on note f' la fonction dérivée de f.

Partie A :

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$.

Partie B :

On note C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g ans un repère orthonormé. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous.



1. Etudier la position relative de la courbe C_f par rapport à la courbe C_g sur $\mathbb{R}$.

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)e^{-x}$.
On admet que H est une primitive de la fonction $x \longmapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
On note D le domaine délimité par la courbe C_f, la courbe C_g et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
Calculer en unité d'aire, l'aire du domaine D. On donnera une valeur exacte en unité d'aire puis en cm^2.

Exercice n°3 (12,5 points)

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y) \in M_3(\mathbb{R})$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1,0)$ et $B = M(0,1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Quel est le rang de la matrice A ?
3. Montrer que 1,2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $(1 \quad -2 \quad 1)$ et telle que :

$$A = PD_AP^{-1} \text{ où } D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer P^{-1}. (Faire figurer le détail des calculs sur la copie).
6. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}.$$

7. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ il existe une matrice diagonale $D(x, y) \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$

8. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
9. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A est-elle aussi un élément de E ?

Exercice n°4 (4 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est entier.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n et u_{n+1} sont de parité différente.
3. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors u_p est premier. »
4. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$.
   b. On admet que le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7 est $n = 6$.
   En déduire que u_{2022} est divisible par 7.

Exercice n°5 (12 points)

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par : $f(x) = e^x - eln(x)$

On admet les encadrements numériques suivants :

$2,7 < e < 2,8$ $\qquad$ $7,3 < e^2 < 7,4$ $\qquad$ $0,6 < \ln(2) < 0,7$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$ et $f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$

Partie I : Etude de la fonction

1. Dresser le tableau de variations complet de f'sur $]0;+\infty[$. Préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations complet de f sur $]0;+\infty[$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. Montrer que l'équation $f'(x) = x$ admet une unique solution note α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie 2 : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

5. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 2$.
6. a. Etudier les variations, puis le signe de la fonction $g :\ [2;+\infty[\to \mathbb{R}\ , x \longmapsto\ f(x) - x$.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. a. Démontrer : $\forall x \in [2;+\infty[, 2\ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$
   b. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n$.
   c. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

~FIN~