MINISTÈRE
DE L'ÉCONOMIE,
DES FINANCES
ET DE LA SOUVERAINETÉ
INDUSTRIELLE ET NUMÉRIQUE
Liberté
Égalité
Fraternité

Direction générale de la concurrence
de la consommation
et de la répression des fraudes

CONCOURS D'INSPECTEUR
DE LA CONCURRENCE DE LA CONSOMMATION ET DE LA REPRESSION DES FRAUDES DU 16 janvier 2024

Concours externe dominante scientifique et technologique

EPREUVE N° 2 : **Option H→ Mathématiques**

Résolution de problèmes et/ou cas pratiques

(Durée 3 heures - coefficient 1)

L'utilisation de la calculatrice est interdite

Le sujet est composé de 4 pages et 3 exercices. La qualité de la rédaction et des justifications sera prise en compte.

Exercice n°1 : **5 points**

On souhaite coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- **Etape 1** : Chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspondant à la deuxième lettre du mot.

- **Etape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;
  La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Etape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \ [26] \\ z_2 \equiv y_2 \ [26] \end{cases}$ avec z_1 et z_2 tels que $0 \leq z_1 \leq 25$ et $0 \leq z_2 \leq 25$.

- **Etape 4 :** $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

1. **Exemple** : $RE \to \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \to DP$.
   Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.
2. Soient x_1, x_2, x_1', x_2' quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x_1' + x_2' \ [26] \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x_1' + 2x_2' \ [26] \end{cases}$

   b. En déduire que $x_1 \equiv x_1' \ [26]$ et $x_2 \equiv x_2' \ [26]$ puis que $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$.
3. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

   a. Montrer que C est inversible et déterminer C^{-1} , la matrice inverse de C.
   b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

   c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ avec x_1 et x_2 tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \ [26] \\ x_2 \equiv y_2 \ [26] \end{cases}$ avec $0 \leq x_1 \leq 25$ et $0 \leq x_2 \leq 25$.
   d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?
4. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient $y_1{}'$ et $y_2{}'$ tels que $\begin{pmatrix} y_1{}' \\ y_2{}' \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Soient x_1 et x_2 les nombres entiers tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1{}' \ [26] \\ x_2 \equiv y_2{}' \ [26] \end{cases}$ avec $0 \leq x_1 \leq 25$ et $0 \leq x_2 \leq 25$.

Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \ [26] \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \ [26] \end{cases}$.

Conclure.

5. Décoder QC.

Exercice n°2 : 5 points (1 point /question)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\ [2\pi]\}$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ est imaginaire pur.
2. On pose : $B = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{13}}{(\sqrt{3}-3i)^{14}}$. Mettre B sous forme trigonométrique et algébrique.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.
4. Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 4x - y = 1\}$ et $B = \cup_{t \in R} \{(t+1;\ 4t+3)\}$. Montrer par double inclusion que ces deux ensembles sont égaux.
5. Montrer que : $\forall (a;\ b) \in [1;\ +\infty[\times [1;\ +\infty[;\ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{|a-b|}{2}$

Exercice n°3 : 10 points

L'objectif de cet exercice est de déterminer un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$ en $+\infty$.

Partie A : 3 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Représenter graphiquement la fonction f.
3. Montrer que $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Etudier $\lim\limits_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_\epsilon^1 f(x)dx$.
6. Etudier $\lim\limits_{M \to +\infty} \int_1^M f(x)dx$.

Partie B : 2 points

On considère n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$.

On appelle moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel $m_a = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

On appelle moyenne géométrique de ces nombres le nombre réel $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

On appelle moyenne harmonique de ces nombres le nombre réel $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

7. En utilisant la partie A, montrer que $m_g \leq m_a$.
8. Dans quel cas a-t-on $m_g = m_a$?
9. Démontrer que pour tout triplet $(x; y; z)$ de réels, on a $x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4 - 4x^2y^2z^2 + 1 \geq 0$.
10. En utilisant l'inégalité de la q1, montrer que $m_h \leq m_g$.
11. Dans quel cas a-t-on $m_h = m_g$?
12. Conclure que $m_h \leq m_a$. En déduire que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$.

Partie C : 5 points

13. En utilisant la partie B, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.
14. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$.
15. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$.
16. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a $\frac{n}{1+\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$.
17. Déterminer la limite de $\sqrt[n]{n!}$ Quand n tend vers $+\infty$.
18. Démontrer que la suite $\left(\sqrt[n]{n!}\right)$ est croissante.
19. Démontrer que la suite $\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$ est bornée.
20. Déterminer pour k un entier naturel supérieur ou égal à 2, un encadrement de $\ln(k)$ par deux intégrales de la fonction ln. En déduire que $\int_1^n \ln(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{k=n} \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(x)\, dx$.
21. Conclure quant au problème initialement posé.