N° Anonymat : JLSNZ813 EU Nombre de pages : 12

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)
Concours / Examen : Inspecteur DGCCRF Section/Spécialité/Série : Scientifique
Epreuve : Mathématiques Matière : Session : 2022

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Exercice 1

1) On cherche les entiers n de la forme $n = 5k + r$, avec $r, k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < 5$, et $k = 3r$ (k est le quotient et r le reste).
En prenant respectivement $r = 0, 1, 2, 3, 4$, on trouve $n = 0, 16, 32, 48, 65$.
puisque $n = 5 \times 3r + r = 16r$

2) On a $\begin{cases} a = 8 \mod b \\ 2a = 5 \mod b \end{cases}$ donc $a = 2a - a = 5 - 8 \mod b$
$= -3 \mod b$.
D'où $0 = a - a = 8 - (-3) \mod b$
$= 11 \mod b$.
On en déduit que b divise 11 donc, comme $b \neq 1$ (sinon on ne pourrait pas avoir $a = 8 \mod b$ et $2a = 5 \mod b$), on a $b = 11$.

3) Tout entier relatif n s'écrit $n = 4k + r$ avec $k, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < k$., où r est le reste de la division euclidienne de n par 4.
On a $r \neq 0$, car sinon n serait divisible par 4
$r \neq 1, 3$, car sinon n serait impair.
Donc $n = 2$, cqfd.

4) a) $D^+(15) = \{n \in \mathbb{Z}, n \text{ divise } 15 \text{ et } n \geq 0\} = \{n \in \mathbb{Z} ; n \text{ divise } 15\} \cap \mathbb{N}$
$= D(15) \cap \mathbb{N}$.
On a $D^+(15) = \{1; 3; 5; 15\}$

b) On a $x^2 = 2xy + 15 \iff x^2 - 2xy = 15$
$\iff x(x - 2y) = 15$
Donc 15 est divisible par x (le quotient est $2x - y$ ~~$\in \mathbb{Z}$~~)
et 15 est divisible par $(x - 2y)$ (le quotient est $x \in \mathbb{Z}$.

.1.111

c) On sait que x est un diviseur positif de 15. D'autre part, $x(x-2y)=15$ donc $x-2y>0$, puisque $x>0$ et $15>0$.
Donc $x \neq 1$ (car sinon on aurait $1-2y>0$, donc $y \neq 0$ et $x=1$, $y=0$ n'est pas solution).
Reste à traiter les cas $x=15$, 5, 3.
~~D'autre part, $x-2y \geq 0$ donc $y \leq \frac{x}{2}$ et $x-2y$~~
~~Compte~~ On obtient le tableau suivant :

x	15	15	15	5	5	3
$x-2y$	5	3	1	3	1	1
y	5	6	7	1	1	1
x^2-2xy	75	45	15	15	5	3

Les solutions sont $(x;y)=(15;7)$ ou $(5;1)$.

Exercice 2

Partie 1.

1) f et g sont définies là où $1-t^2 \neq 0$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

2) $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}^2}{1-\sqrt{3}^2} = \frac{3}{1-3} = -\frac{3}{2}$

$g(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}^3}{1-\sqrt{3}^2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3) $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, on a
$f(-t) = \frac{(-t)^2}{1-(-t)^2} = \frac{t^2}{1-t^2} = f(t)$ donc f est paire

$g(-t) = \frac{(-t)^3}{1-(-t)^2} = \frac{-t^3}{1-t^2} = -g(t)$ donc g est impaire.

On a donc $M(-t) = (f(t);-g(t))$ Donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses.

4) Pour $t \neq 0$, $f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{\frac{1}{t^2}-1} \underset{+\infty}{\sim} -1$.

et $g(t) = \frac{t^3}{1-t^2} = \frac{t}{\frac{1}{t^2}-1} \underset{+\infty}{\sim} -t$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(t) = -\infty$.

5) Pour $t > 1$, on a $1-t^2 < 0$ et $\lim\limits_{t\to 1} 1-t^2 = 0$ donc
$\lim\limits_{t\to 1+} f(t) = \lim\limits_{t\to 1+} g(t) = -\infty$.

De même, pour $0 < t < 1$, $1-t^2 > 0$ donc $\lim\limits_{t\to 1-} f(t) = \lim\limits_{t\to 1-} g(t) = +\infty$.

6) f et g sont des fractions rationnelles, donc elles sont dérivables sur leur domaine de définition, qui est $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

$$f'(t) = \frac{2t(1-t^2) - t^2(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2t - 2t^3 + 2t^3}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$$

$$g'(t) = \frac{3t^2(1-t^2) - t^3(-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2 - 3t^4 + 2t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2 - t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$$

7) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f'(t) > 0 \iff 2t > 0 \iff t > 0$.

et

$g'(t) > 0 \iff 3-t^2 > 0$

$\iff t^2 < 3$

$\iff t \in]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$.

On obtient les tableaux de variation suivants :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$	↗	-1
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$			

Partie 2

8) On a $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$ donc $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + o(t^4)$

Donc $f(t) = t^2 + t^6 + o(t^6) = t^2 + o(t^3)$

$g(t) = t^3 + t^7 + o(t^7) = t^3 + o(t^3)$.

N° Anonymat : JLSNZ813 EU Nombre de pages : 12

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)
Concours / Examen : Inspecteur DGCCRF Section/Spécialité/Série : Scientifique
Epreuve : Mathématiques Matière : Session : 2022

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Exercice 3 1) On a $z_1 = (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 2$

$z_2 = 2(1+i) = 2+2i$

Donc $z_1/z_2 = \frac{2}{2+2i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$.

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{z \times \bar{z}} = \bar{z} \times \bar{\bar{z}} = \bar{z} \times z$ Donc $z \times \bar{z}$ est égal à son conjugué complexe. Donc c'est un nombre réel.

3) a) $u_0 = (1+i)(1-i) = 2$

$u_1 = 2 \times 2 = 4$

$u_2 = (2+2i)(2-2i) = 4(1+i)(1-i) = 8$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{R}$ car $u_n = z_n \times \bar{z}_n$ qui est réel par le 2).

c) On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = z_{n+1}\,\overline{z_{n+1}} = (1+i) z_n \overline{(1+i) z_n} = (1+i) z_n (1+i) \bar{z}_n$

$= (1+i)(1-i) z_n \bar{z}_n = 2 u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

d) On a $u_n = 2^n u_0 = 2^{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$ (car $u_0 = 2$).

e) $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} = +\infty$.

Exercice 4

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, ~~et $\forall t > 0$, on a $t^n e^{-t^2} =$~~ on a : $\forall t > 0$,

$\frac{t^n e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2} e^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donc $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

..5/14.

N° Anonymat : JLSNZ813 EU Nombre de pages : 12

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
D'autre part, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est ~~prolongeable~~ continue sur $[0; +\infty[$ donc elle est intégrable sur $[0; +\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

3) La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et elle est paire pour n pair et impaire pour n impair.
Donc, par symétrie, elle est intégrable sur $]-\infty; 0]$ et donc sur $]-\infty; +\infty[$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ est convergente.

4) ~~La~~ Une fonction $t \mapsto P(t) e^{-t^2}$, où P est un polynôme, est une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $t \mapsto t^n e^{-t^2}$, $n \in \mathbb{N}$, dont les intégrales sur $\mathbb{R}$ sont convergentes.
Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ est convergente.

5) $I_{n+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} t^{n+1} (-2t) e^{-t^2} dt$ On fait une intégration par parties

$= \left[-\frac{1}{2} t^{n+1} e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2}(n+1) t^n e^{-t^2} dt$

$= 0$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(n+1) t^n e^{-t^2} dt$

$= \frac{n+1}{2} I_n$.

6) Pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^{2p+1} e^{-t^2}$ est impaire, donc son intégrale est nulle, donc $I_{2p+1} = 0$.

7) On montre le résultat par récurrence :
Pour $p = 0$, on a $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} = \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0} \times 0!} \sqrt{\pi}$

..6.1.11.

Supposons que pour $p \in \mathbb{N}$, on ait $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$

Alors $I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p}$ par le 5)

$= \frac{2p+1}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ par hypothèse de récurrence.

$= \frac{2(p+1)^2}{2^2(p+1)} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$

$= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2^{2p+2}(p+1) p!} \sqrt{\pi}$

$= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} \sqrt{\pi}$

$= \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}(p+1)!} \sqrt{\pi}$ cqfd.

8) $\forall x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto \sin(xt)$ et $t \mapsto \cos(xt)$ sont bornées donc au voisinage de $+\infty$, on a $\sin(xt) e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t\cos(xt) e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par la même argumentation que dans le 1). Donc les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2}$ et $\int_0^{+\infty} t\cos(xt) e^{-t^2}$ convergent puisque l'on intègre des fonctions continues sur $[0;+\infty[$.

Exercice 5

1) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0;0\}$, f est continue car c'est une fraction rationnelle de dénominateur qui ne s'annule pas.

2) On a $0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
et $0 \leq (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
donc $|2xy| \leq x^2 + y^2$.

Par suite, pour $(x,y) \neq (0;0)$, on a

$$|f(x,y)| = \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{3|xy|}{2} \frac{2|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{3|xy|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Donc f est continue en $(0;0)$.

3) a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{6xy^2(x^2+y^2) - 3x^2y^2(2x)}{(x^2+y^2)^2}$

$= \frac{6x^3y^2 + 6xy^4 - 6x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$= \frac{6xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{6x^4y}{(x^2+y^2)^2}$

b) Pour $h, y \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\left|\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h}\right| = \left|\frac{f(h,y)}{h}\right| \leq \frac{3|hy|}{2|h|} = \frac{3}{2}|y| \xrightarrow{y \to 0} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe en $(0;0)$ et vaut 0.

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en $(0;0)$ et vaut 0.

4) ~~$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$~~

~~$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{6x^5}{4x}$~~

..8/11.

N° Anonymat : JLSNZ813 EU Nombre de pages : 12

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)
Concours / Examen : Inspecteur Section/Spécialité/Série : scientifique
Epreuve : Mathématiques Matière : ..... Session : 2022

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Exercice 6

1) a) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $M(a,b) = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$ donc

$E = \text{vect}(A, B)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

Les matrice A et B sont linéairement indépendantes : si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $\lambda A + \mu B = 0$, alors $\lambda = 0$ (regarder le coefficient en haut à ~~droite~~ gauche) et $\mu = 0$ (regarder le coefficient en bas à gauche).

Donc (A, B) est une base de E et $\dim E = 2$.

b) On trouve que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas dans E, donc E n'est pas stable par produit.

2) $M(0,0)$ est la matrice nulle. Elle est diagonalisable car elle est diagonale.

3) a) On trouve par le calcul que ~~$A^2 = A$~~ donc $M(1,0)^2 = M(1,0)$

~~$M(a,0)^2 = (aA)^2 = a^2A^2 = a^2A = aM(a,0)$~~

$A^2 = (aM(1,0))^2 = a^2 M(1,0)^2 = aM(1,0) = aA$

D'où $M(a,0)^2 - aM(a,0) = 0$.

$A^2 - aA = 0$.

Le polynôme $X^2 - aX$ est un polynôme annulateur de $M(a,0)$

b) $X^2 - aX = X(X-a)$. Les valeurs propres de A ne peuvent être que 0 ou a.

D'autres part, on trouve que

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Donc 0 et a sont des ~~espaces~~ valeurs propres, les sous-espaces propres associés sont respectivement engendrés par

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

↳ ces vecteurs sont linéairement indépendants donc forme une base du ~~sous~~ espace propre associé à 0.

c) A est diagonalisable car elle admet une base de vecteurs propres.

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}$$

4) a) $B - bI_4 = \begin{pmatrix}-b&0&0&0\\0&-b&0&0\\0&0&-b&0\\b&b&b&0\end{pmatrix}$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ses colonnes est de dimension 3, donc B est de rang 3.

b) D'après le a), b est valeur de B, et la dimension du sous-espace propre associé est :

$\dim \ker(B - bI_4) = 4 - \operatorname{rg}(B - bI_4) = 4 - 3 = 1$.

D'autre part, la matrice B est clairement de rang 1 puisque ~~la~~ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ses colonnes est de dimension 1.

Donc $\dim \ker B = 3$ et 0 est valeur propre de B avec un sous-espace propre de dimension 3.

c) B est diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous espaces propre est égale à $4 = \dim \mathbb{R}^4$.